ДЕФЕКТОСКОПИЯ ЛЕГКИХ НЕМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОСТАТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ МГНОВЕННО ВЫКЛЮЧЕННОГО ТОКА

Марвин С.В.
ФГАОУ ВПО УрФУ, г. Екатеринбург
s.v.marvin@yandex.ru

Рассмотрена начально-краевая задача электродинамики для дефектного неферромагнитного металлического тела с ненулевыми начальными данными и нулевым сторонним током. С использованием теоремы Хилле-Иосиды показано, что существует единственное решение указанной начально-краевой задачи.

В производстве металлических изделий, в том числе изделий из легких металлических сплавов, первостепенную актуальность имеет неразрушающий контроль, в частности, неразрушающий контроль вихретоковыми методами. В неразрушающем контроле, наряду со стационарными вихретоковыми методами, применяются и нестационарные способы контроля: контролируемое изделие подвергается воздействию переменного электромагнитного поля, меняющегося не по гармоническому закону. Например, одна из разновидностей баллистического метода заключается в помещении контролируемого образца в поле стороннего тока с последующим резким выключением этого тока. Распределение затухающего электромагнитного поля в пространстве вокруг контролируемого образца и конкретный график его убывания с течением времени определяется неоднородностями и дефектами внутри образца.

Для математического описания нестационарного электромагнитного поля необходима точная постановка, а затем точное или приближенное решение начально-краевых задач электродинамики: задач с начальными и граничными условиями, в которых не подразумевается гармоническая зависимость поля от времени. И, в первую очередь, необходимо доказательство существования и единственности решения таких задач. В частности, необходима точная постановка с доказательством существования единственного решения начально-краевых задач электродинамики для металлов с магнитной проницаемостью $\mu \approx 1$. Заметим, что этому условию удовлетворяет широкий класс легких неферромагнитных металлических сплавов на основе магния, алюминия и титана.

Рассмотрим начально-краевую задачу электродинамики в следующей постановке. Пусть металлическое тело занимает ограниченную область Ω; граница Ω — кусочно-гладкая. Дефекты занимают области Ω_1, Ω_2, Ω_n, тоже с кусочно-гладкими границами; замыкания этих областей не пересекаются и полностью содержатся в Ω: $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Сторонний ток предполагается выключенным в начальный момент времени $t = 0$, то есть при $t \geq 0$ сторонний ток отсутствует. Однако, до момента его выключения он создает ненулевое электромагнитное поле, напряженности которого в момент $t = 0$ являются неоднородными начальными условиями рассматриваемой задачи.

Электропроводность тела σ не зависит от времени и предполагается непрерывно дифференцируемой функцией пространственных координат во внутренних точках Ω_i и в точках Ω, внешних по отношению к Ω_i. Кроме того, σ допускает непрерывно дифференцируемое продолжение на границу Ω_i как изнутри, так и снаружи Ω_i. Однако, при переходе через границу Ω_i электропроводность σ терпит разрыв. Также σ допускает непрерывно-дифференцируемое продолжение на границу Ω изнутри области. В дефектоскопии используются поля, меняющиеся достаточно медленно, чтобы пространственной и временной дисперсией электропроводности можно было пренебречь.

Металл, из которого изготовлено тело, предполагается слабым магнетиком, и с достаточно высокой точностью можно считать, что его магнитная проницаемость $\mu = 1$. С не менее высокой точностью можно считать, что диэлектрическая проницаемость ионного остова металла $\varepsilon = 1$.

Внешняя среда предполагается непроводящей, то есть ее электропроводность равна 0. Диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды равны 1.

Напряженность электрического поля $\mathcal{E}$ и напряженность магнитного поля $\mathcal{H}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathcal{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathcal{H} = \sigma(\boldsymbol{r})\mathcal{E} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \end{cases}, \tag{1}$$

где μ_0 — магнитная постоянная, ε_0 — диэлектрическая постоянная, $\boldsymbol{r}$ — упорядоченный набор пространственных координат (x, y, z).

На поверхностях разрыва $\sigma(\boldsymbol{r})$ (граница тела, границы дефектов) должно выполняться граничное условие непрерывности тангенциальных (касательных) компонент напряженностей:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\tau^{\mathrm{int}} = \mathcal{E}_\tau^{\mathrm{ext}} \\ \mathcal{H}_\tau^{\mathrm{int}} = \mathcal{H}_\tau^{\mathrm{ext}} \end{cases}. \tag{2}$$

В момент времени $t = 0$ напряженности равны своим начальным значениям $\mathcal{E}(\boldsymbol{r},0)$ и $\mathcal{H}(\boldsymbol{r},0)$, причем $\mathrm{div}\mathcal{H}(\boldsymbol{r},0) = 0$.

В качестве функционального пространства, в котором нужно искать решение поставленной начально-краевой задачи, наиболее естественно взять пополнение функционального пространства упорядоченных пар векторных функций $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r});\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}))$ со следующими свойствами. Функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ должны быть непрерывно дифференцируемы во внутренних точках Ω_i и в точках Ω, внешних по отношению к Ω_i, причем должны допускать непрерывно дифференцируемое продолжение на границы Ω_i изнутри и снаружи Ω_i, а также на границу Ω изнутри и снаружи Ω. Также функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ должны быть квадратично интегрируемы во всем пространстве $\Re^3$ (для $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ это требование означает, что энергия электромагнитного поля во всем пространстве конечна). Кроме того, на поверхностях разрыва $\sigma(\boldsymbol{r})$ векторные функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ должны удовлетворять граничным условиям вида (2). Пополнение должно производиться по следующей норме:

$$\left\|(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r});\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}))\right\| = \|\boldsymbol{u}\|_2 + \alpha\|\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\|_2 + \beta\|\boldsymbol{u}\|_2 + \gamma\|\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\|_2,$$

где α, β и γ — положительные множители, согласующие размерности; $\|\boldsymbol{w}\|_2 = \sqrt{\int\limits_{\Re^3}|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})|^2 dV}$, dV — элемент интегрирования по объему.

Методами функционального анализа [1,2] можно показать, что указанное пополнение совпадает с функциональным пространством $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot},\Re^3)$ — пространством пар векторных функций $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r});\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}))$, которые квадратично суммируемые в $\Re^3$ и имеют квадратично суммируемый в $\Re^3$ ротор (ротор в обобщенном смысле): для любой финитной бесконечно дифференцируемой векторной функции $\varphi(\boldsymbol{r})$

$$\int\limits_{\Re^3}\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})dV = \int\limits_{\Re^3}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\varphi(\boldsymbol{r})dV,$$

$$\int\limits_{\Re^3}\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})dV = \int\limits_{\Re^3}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\varphi(\boldsymbol{r})dV.$$

По теореме Хилле-Иосиды, достаточным условием существования единственного решения системы дифференциальных уравнений (1) в функциональном пространстве $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot},\Re^3)$, удовлетворяющего любым начальным условиям из $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot},\Re^3)$, является существование и единственность решения в $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot},\Re^3)$ следующей системы дифференциальных уравнений (при достаточно больших положительных p):

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) \end{cases}. \qquad (3)$$

Для выполнения условий теоремы Хилле-Иосиды решение данной системы уравнений должно существовать и быть единственным при любых квадратично суммируемых $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$, причем его норма должна быть ограниченной по сравнению с $\|\boldsymbol{f}\|_2$ и $\|\boldsymbol{g}\|_2$.

Для единственности достаточно доказать, что при нулевых $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ у системы (3) есть только тривиальное решение. Для $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ из (3) вытекает следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Re^3} \left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right)dV -$$
$$+ \int_{\Re^3} \sigma(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 dV + \varepsilon_0 p \int_{\Re^3} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 dV + \mu_0 p \int_{\Re^3} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})|^2 dV = 0.$$

Первый интеграл в этом интегральном тождестве для функций класса $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot}, \Re^3)$ равен нулю и, следовательно, все подынтегральные функции в остальных интегралах тоже раны нулю в силу их неотрицательности.

Система интегро-дифференциальных уравнений, альтернативная системе уравнений для функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ [3]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \text{-}\mu_0 \mathrm{rot} \displaystyle\int_{\Re^3} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV' + \\ + \dfrac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0}\left[\displaystyle\int_{\Omega} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\sigma}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV' + \varepsilon_0 \int_{\Re^3} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'\right] \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\displaystyle\int_{\Re^3} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV' + \\ + \mathrm{rot}\left[\displaystyle\int_{\Omega} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV' + \varepsilon_0 \int_{\Re^3} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'\right] \end{cases},$$

где $G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \dfrac{\exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$. Пользуясь свойствами объемного потенциала, а также оценками для нормы потенциала и его производных [4], можно показать, что при $p \geq \dfrac{20\sigma_{\max}}{\varepsilon_0}$ ($\sigma_{\max}$ — максимальное значение электропроводности в металлическом теле) у данной системы уравнений существует единственное квадратично суммируемое решение. Это решение принадлежит функциональному пространству $\boldsymbol{H}_2^2(\mathrm{rot},\Re^3)$. Кроме того, это решение удовлетворяет системе уравнений (3), если понимать ротор в указанном обобщенном смысле, а также справедливы следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \frac{3\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{5\sigma_{\max}}\|\boldsymbol{f}\|_2 + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{\max}}\|\boldsymbol{g}\|_2,$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \le \frac{17\varepsilon_0}{25\sigma_{\max}}\|\boldsymbol{f}\|_2 + \frac{3\varepsilon_0^2}{5\sigma_{\max}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\|\boldsymbol{g}\|_2.$$

То есть, условия теоремы Хилле-Иосиды выполняются полностью, и у рассмотренной начально-краевой задачи существует единственное решение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Павлова М.Ф. Пространства Соболева (теоремы вложения) / М.Ф. Павлова, М.Р. Тимербаев. Казань: ГОУ ВПО КазГУ, 2010. 123 с.

2. Калинин А.В. Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении / А.В. Калинин. Нижний Новгород: ГОУ ВПО ННГУ, 2007. 121 с.

3. Дякин В.В., Раевский В.Я. Прямая и обратная задача классической электродинамики// Дефектоскопия. 1996. № 10. С. 31–39.

4. Марвин, С.В. Начально-краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца / С. В. Марвин, В. В. Дякин // Электричество. 2008. № 12. С. 30–36.